Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая вещественная функция вещественного переменного. Положим $\Delta(f) = f''/f'$. *Оператор Шварца* $S(f)$ определяется равенством
$$S(f) = \Delta(f)' - (\Delta(f))^2/2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$
Докажите, что если $g = \dfrac{af+b}{cf+d} \neq \mathrm{const}$, то $S(f) = S(g)$. Если же $g = af + b$, $a \neq 0$, то $\Delta(f) = \Delta(g)$. (*Фольклор*)

2. Стороны и диагонали правильного 43-угольника P раскрашены в два цвета — красный и синий — так, чтобы в каждой вершине

сходилось 20 красных и 22 синих отрезка. При этом образовалось 2022 синих одноцветных треугольников. Найдите число красных одноцветных треугольников.

(*IMC-2022, предложил М. Даас, Лейденский университет*)

3. Докажите, что при всех $0 < x \leqslant \pi/2$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{\sin^2 x} \leqslant \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}.$$

(*Фольклор*)

4. Два правильных k-угольника $A_1 \ldots A_k$ и $B_1 \ldots B_k$ вписаны в одну и ту же окружность. При каком максимальном n для любого многочлена $P(x, y)$ степени n выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{k} P(A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)?$$

(*Л. Радзивиловский*)

5. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырёхугольник $ABCE$, который делится диагональю BE на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины рёбер BC и CE равны. Сумма длин рёбер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объём пирамиды равен $1/6$. Найдите радиус шара, имеющего наибольший объём среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$[1].

(*Письменный вступительный экзамен ВМК* 1978)

6. Существует ли такое дифференциальное уравнение, что множество его решений всюду плотно в пространстве гладких функций в топологии C^∞? (*Ю. И. Манин*)

7. а) Даны три софокусных эллипсоида (с совпадающими осями и равными разностями квадратов соответствующих осей). Найдите геометрическое место вершин прямоугольных параллелепипедов, у которых одна пара противоположных граней касается одного эллипсоида, вторая — второго, а третья — третьего.

б) Дан эллипсоид с центром O и полуосями a, b, c. Три попарно перпендикулярных луча с началом O пересекают эллипсоид в точках U, V, W. Найдите расстояние от O до плоскости UVW.

(*А. Заславский, Ф. Нилов*)

[1] Родственная задача предлагалась в 1959 г. на вступительном экзамене в МФТИ. О том, как её решали три академика, можно прочесть в заметке А. В. Жукова «Как академики задачу решали» (см. «Математика для школьников», 2006, № 3, с. 16–17, а также *Горобец Б. С.* «Круг Ландау: физика войны и мира», М.: Либроком, 2009, с. 238–239).

8. Две обратимые матрицы A и B *существенно различны*, если для любого вектора $\vec{v}$ его образы $A(\vec{v})$ и $B(\vec{v})$ образуют тупой угол. Какое максимально возможное количество попарно существенно различных матриц может быть в пространстве размерности n при а) $n = 3$, б) $n = 4$, в) (задача на исследование) в общем случае?
(*Л. Радзивиловский*)

9. Робот Чертёжник является *конечным автоматом*, т. е. имеет только конечное число внутренних состояний. Он может передвигаться по клетчатому листу бумаги, закрашивая клетки. Для Чертёжника допустимы всего три действия:
   1) *закрасить* — закрасить клетку,
   2) *налево* — повернуться на 90 градусов налево вокруг начала стрелки,
   3) *прыгнуть* — перепрыгнуть в центр соседней клетки по направлению стрелки.

   Кроме того, Чертёжник умеет проверять условие *впереди край*.

   а) Напишите программу для Чертёжника, по которой он на любом листе бумаги (в том числе и тогда, когда размер листа не помещается в его памяти) закрасит все клетки квадрата, кроме клеток, содержащих его центр (в зависимости от чётности длины стороны листа это одна клетка или четыре клетки).

   б) Можно ли написать программу, чтобы Чертёжник закрасил *только* центр листа? (*А. Я. Канель-Белов, М. В. Сапир*)

10. Пусть в $\mathbb{R}^4$ дано произвольное объединение прямых (одномерных аффинных подпространств) U. Определите, какому букету топологических пространств гомотопически эквивалентно дополнение $\mathbb{R}^4 \setminus U$.

    (*Букет топологических пространств* — это такое объединение двух или более топологических пространств, что все они вместе пересекаются в единственной точке. *Гомотопически эквивалентные пространства* — это такие два пространства X и Y, что существует непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, композиции которых $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным. Два отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ называются *гомотопными*, если существует такое отображение $F : X \times [0, 1] \to Y$, что $F(x, 0) = f$ и $F(x, 1) = g$.)
(*А. Мингажев*)

11. Имеется k отрезков на плоскости. Оцените сверху число треугольников, все стороны которых принадлежат этому множеству отрезков. Получите оценку сверху вида $O(k^{3/2})$. (*Фольклор*)

12. Группа G не абелева, а все её собственные подгруппы абелевы. Докажите, что G разрешима, причём не более 2 различных простых чисел делят её порядок $|G|$.

    (*Производной группой группы* G или её *коммутантом* называется подгруппа $G' = [G, G]$ группы G, порождённая элементами вида $aba^{-1}b^{-1}$. Группа G *разрешима*, если $G^{(k)} = e$ при некотором k. Например, группа евклидовых преобразований плоскости разрешима, а группа евклидовых преобразований пространства — нет.)

    (*Фольклор*)

13. Докажите, что площадь S выпуклого множества Ω с диаметром d удовлетворяет неравенству $S \leqslant \pi d^2/4$.

    (*Диаметром* множества Ω называется число $d = \sup(|AB| : A, B \in \Omega)$.)

    (*К. Э. Каибханов*)

14. а) Можно ли так отметить n точек в единичном квадрате, чтобы в любом прямоугольнике площади $2/((\sqrt{5}+1)n)$ была отмеченная точка?

    б) Постройте ограниченную бесконечную последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что неравенство $|x_i - x_j||i - j| \geqslant 1$ выполнено для каждой пары различных чисел i и j. (*А. В. Анджанс*)

15. Граница односвязной области Ω состоит из отрезков и дуг окружностей, C — единичный круг, $f : \Omega \to C$ — аналитическая биекция. Докажите, что f выражается через элементарные функции и интегралы от них тогда и только тогда, когда группа, порождённая инверсиями относительно граничных дуг и симметриями относительно граничных отрезков, разрешима. (*А. Я. Канель-Белов*)